Mécanique du solide

Mécanique du solide

I) Cinétique des systèmes matériels :

1 – Rappel ; composition des vitesses et des accélérations :

Soit (R) un premier référentiel (appelé « absolu », (Oxyz)) et (R') un référentiel (appelé « relatif », (O'x'y'z')) en mouvement par rapport à (R).

- (R') est en translation par rapport à (R) :

Composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e = \vec{v}'(M) + \vec{v}(O')$$

Composition des accélérations :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e = \vec{a}'(M) + \vec{a}(O')$$

- (R') est en rotation autour d'un axe fixe de (R) : (O et O' sont confondus)

Composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e = \vec{v}'(M) + \vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On peut rappeler la formule de Varignon :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \vec{A}$$

Composition des accélérations :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge (\vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \overrightarrow{OM})\right] + \left[2\vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \vec{v}'(M)\right]$$

Un 1er exemple : un forain sur un manège pour enfants

Un manège d'enfants tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$ constante. Le propriétaire parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets. Partant du centre à t = 0, il suit un rayon de la plate-forme avec un mouvement uniforme de vitesse v_r.

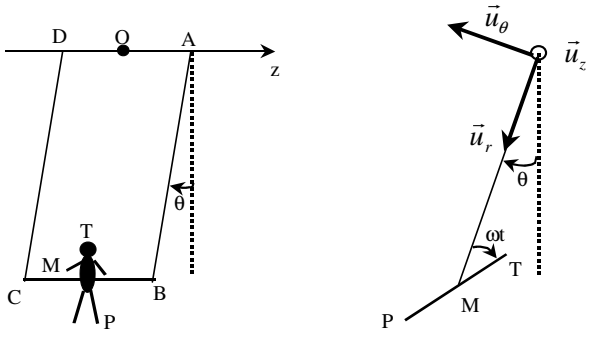
a) Etablir l'équation de la trajectoire de l'homme dans le référentiel terrestre (trajectoire vue par les parents).

b) Déterminer la vitesse de l'homme par rapport à la Terre, à partir des équations de la trajectoire puis en utilisant la composition des vitesses.

c) Déterminer l'accélération de l'homme par rapport à la Terre, à partir des équations de la trajectoire puis en utilisant la composition des accélérations.

Un 2nd exemple : mouvement d'un trapéziste

Le trapèze ABCD effectue des oscillations sinusoïdales $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$.



Données : OM = AB = DC = b et MP = d.

Le trapéziste, assimilable à une tige TMP, tourne autour de BC avec une vitesse relative ω constante par rapport au trapèze. A l'instant initial, le trapéziste est vertical, la tête T en haut. Les notations sont celles de la figure.

Déterminer pour le point P (les pieds du trapéziste), à l'instant $t = \pi / \omega$, l'accélération dans le référentiel (R') lié au trapèze, l'accélération de Coriolis, l'accélération d'entraînement et l'accélération dans le référentiel terrestre (R).

Solution :

Dans le référentiel lié au trapèze, P effectue une rotation uniforme autour de M à la vitesse angulaire constante ω. Par conséquent :

$$\vec{v}'(P) = \omega \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{MP} = -\omega d \sin \omega t \ \vec{u}_r + \omega d \cos \omega t \ \vec{u}_\theta$$

Et :

$$\vec{a}'(P) = -\omega^2 \overrightarrow{MP} = -\omega^2 d \cos \omega t \ \vec{u}_r - \omega^2 d \sin \omega t \ \vec{u}_\theta$$

L'accélération de Coriolis est donnée par :

$$\vec{a}_c(P) = 2\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{v}'(P) = -2\theta_0 \omega^2 d \cos^2 \omega t \ \vec{u}_r - 2\theta_0 \omega^2 d \cos \omega t \sin \omega t \ \vec{u}_\theta$$

L'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_e(P) = \ddot{\theta}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OP} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_e(P) = \begin{vmatrix} \theta_0 \omega^2 (d \sin^2 \omega t - \theta_0 (b + d \cos \omega t) \cos^2 \omega t) \\ \theta_0 \omega^2 (-(b + d \cos \omega t) \sin \omega t - \theta_0 d \sin \omega t \cos^2 \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

A $t = \pi / \omega$ (les pieds P sont en haut), on trouve :

$$\vec{a}'(P) = \omega^2 d \vec{u}_r \quad ; \quad \vec{a}_c(P) = 2\theta_0 \omega^2 d \vec{u}_r \quad ; \quad \vec{a}_e(P) = -\theta_0^2 \omega^2 (b - d) \vec{u}_r$$

On en déduit ensuite l'accélération « absolue » à cet instant :

$$\vec{a}(P) = \vec{a}'(P) + \vec{a}_c(P) + \vec{a}_e(P) = \omega^2(d + 2\theta_0 d - \theta_0^2(b-d))\vec{u}_r$$

2 – Centre d'inertie d'un système, référentiel barycentrique :

Dans le cas de solides ou de systèmes matériels, on est amené à définir une masse volumique, une masse surfacique ou encore une masse linéique :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M)d\tau \quad ; \quad m = \iint_{(S)} \sigma(M)dS \quad ; \quad m = \int_{(C)} \lambda(M)d\ell$$

Remarque : dans la suite, on choisira une représentation continue volumique. Pour une représentation discrète, voir le chapitre de mécanique de sup sur les systèmes de points matériels.

Le centre d'inertie d'un système sera défini par :

- Distribution discontinue :

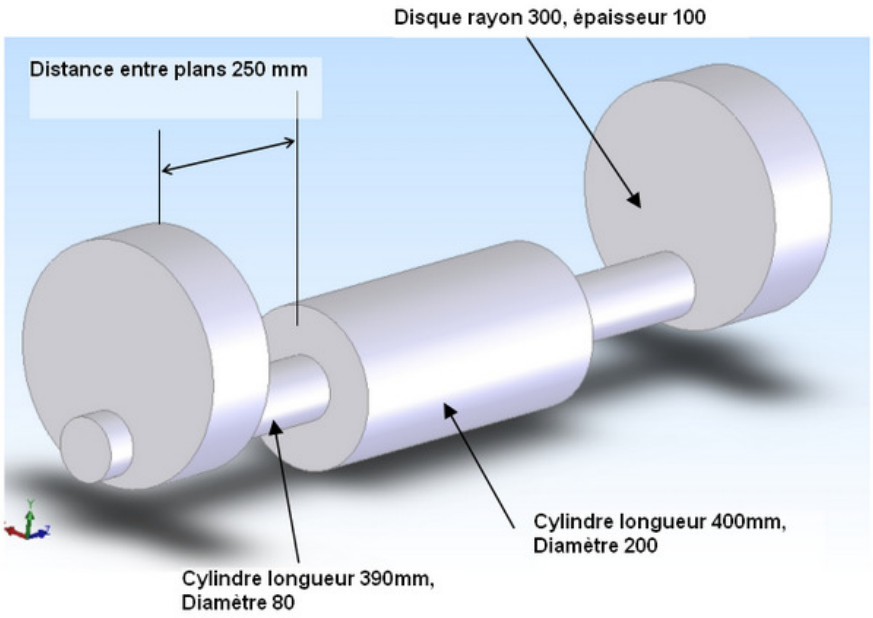
$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{m}$$

- Distribution continue volumique :

$$\iiint_{(V)} \rho(M)\overrightarrow{GM}d\tau \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{(V)} \rho(M)\overrightarrow{OM}d\tau}{m}$$

Le centre d'inertie possède la propriété d'associativité : le centre d'inertie G d'un système (S), constitué de deux systèmes S_1 et S_2 de masse m_1 et m_2 et de centres d'inertie G_1 et G_2, est défini par :

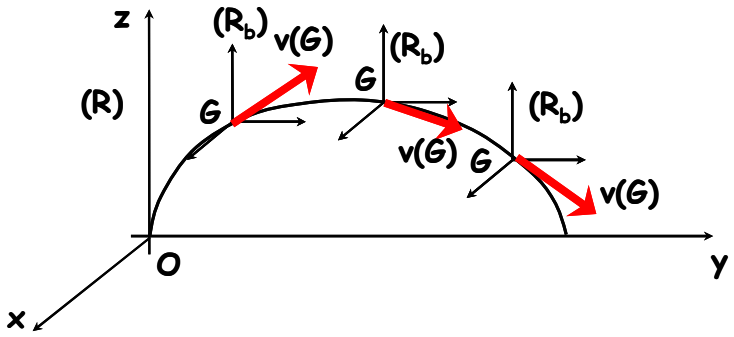
$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}$$



Quel est le centre d'inertie de ce solide ?

Référentiel barycentrique :

Le mouvement du système est étudié dans le référentiel (R). On appelle *référentiel barycentrique* (R_b) relatif au référentiel (R), le référentiel de centre G et animé d'un mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}(G)$ par rapport à (R).



La loi de composition des vitesses s'écrit sous la forme :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_b(M) + \vec{v}(G)$$

3 – Résultante cinétique et moment cinétique d'un système matériel :

- Résultante cinétique (ou quantité de mouvement totale du système) :

$$\vec{P} = \iiint_{(V)} \rho(M)\vec{v}(M)\, d\tau = m\vec{v}(G)$$

Dans le référentiel barycentrique, la résultante cinétique est évidemment nulle.

- Moment cinétique :

Le moment cinétique par rapport à O du système, dans le référentiel (R) est :

$$\vec{L}_O = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\vec{v}(M)\, d\tau$$

Théorème de Kœnig pour le moment cinétique : (voir cours sur les systèmes de deux points matériels)

$$\vec{L}_O = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\vec{v}(M)\, d\tau = \iiint_{(V)} (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \rho(M)(\vec{v}_b(M) + \vec{v}(G))\, d\tau$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \iiint_{(V)} \overrightarrow{GM} \wedge \rho(M)\vec{v}_b(M)\, d\tau$$

Soit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}_{G,b}$$

Remarque :

Le moment cinétique barycentrique ne dépend pas du point où on le calcule. En effet :

$$\vec{L}_{A,b} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge \rho(M)\vec{v}_b(M)\, d\tau = \iiint_{(V)} (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \rho(M)\vec{v}_b(M)\, d\tau$$

Soit :

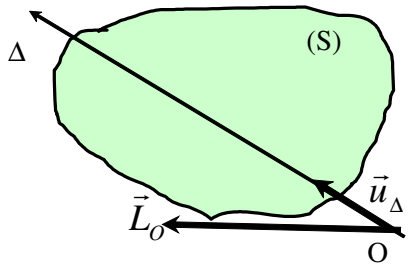
$$\vec{L}_{A,b} = \vec{L}_{G,b} + \overrightarrow{AG} \wedge \iiint_{(V)} \rho(M)\vec{v}_b(M)\, d\tau = \vec{L}_{G,b} + \vec{P}_b = \vec{L}_{G,b} = \vec{L}_b$$

Et, en utilisant le théorème de Kœnig, on a finalement :

$$\vec{L}_G = \vec{L}_{G,b} = \vec{L}_{A,b} = \vec{L}_b$$

Moment cinétique par rapport à un axe :

La projection du moment cinétique $\vec{L}_O$ du système (S) sur un axe Δ passant par O définit le moment cinétique L_Δ de (S) par rapport à Δ.



Ainsi, en introduisant le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ de l'axe (Δ), on obtient :

$$L_\Delta = \vec{L}_O . \vec{u}_\Delta$$

On vérifie facilement que L_Δ est indépendant du point O de l'axe Δ.

La notion de moment cinétique par rapport à un axe est intéressante lorsque le système (un solide par exemple) est justement en rotation autour de cet axe Δ.

4 – Résultante dynamique et moment dynamique d'un système matériel :

- Résultante dynamique :

La résultante dynamique (encore appelée quantité d'accélération) est :

$$\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho(M)\vec{a}(M) d\tau$$

Comme pour la résultante cinétique, on montre que :

$$\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho(M)\vec{a}(M) d\tau = m\vec{a}(G)$$

On montre au passage la relation entre la résultante cinétique et la résultante dynamique :

$$\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

- Moment dynamique :

Le moment dynamique $\vec{D}_O$ en un point O du système (S) dans (R) a pour expression :

$$\vec{D}_O = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\vec{a}(M)\, d\tau$$

Théorème de Kœnig pour le moment dynamique :

La démonstration est comparable à celle relative au moment cinétique. On obtient :

$$\vec{D}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{a}(G) + \iiint_{(V)} \overrightarrow{GM} \wedge \rho(M)\vec{a}_b(M)\, d\tau$$

$$\vec{D}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{a}(G) + \vec{D}_{G,b}$$

Le moment dynamique barycentrique ne dépend du point où on le calcule :

$$\vec{D}_G = \vec{D}_{G,b} = \vec{D}_{A,b} = \vec{D}_b$$

Relation entre moment cinétique barycentrique et moment dynamique barycentrique :

$$\frac{d\vec{L}_b}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{(V)} \overrightarrow{GM} \wedge \rho(M)\vec{v}_b(M)\, d\tau \right) = \vec{D}_b$$

5 – Torseur cinétique et torseur dynamique :

Résultante cinétique et moment cinétique d'une part (résultante dynamique et moment dynamique d'autre part), possèdent les propriétés d'un concept mathématique appelé *torseur* que nous allons définir.

- Notion de torseurs :

On considère un ensemble de points M_i et à chacun de ces points on associe un vecteur $\vec{q}_i$ (ce vecteur pourra être la vitesse, la quantité de mouvement, une force qui agit en ce point, …). On définit alors :

* La résultante : $\vec{R} = \sum_i \vec{q}_i$

* Le moment en O : $\vec{M}_O = \sum_i (\overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{q}_i)$

On vérifie aisément que le moment en deux points O et A vérifient la relation :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \text{(BABAR !!!)}$$

La résultante $\vec{R}$ et le moment en O, $\vec{M}_O$, sont appelés éléments de réduction en O du torseur (T) associé au système de vecteurs $\vec{q}_i$. La donnée des éléments de réduction en un point O définit complètement le torseur puisqu'il est alors possible de calculer les éléments de réduction en tout autre point A :

$\vec{R}$ est indépendante de A et $\vec{M}_A = \vec{M}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R}$

- Torseur cinétique et torseur dynamique :

On vérifie que, dans le référentiel (R), la résultante cinétique $\vec{P}$ et le moment cinétique $\vec{L}_O$ en un point O d'un système matériel (S) forment les éléments de réduction d'un torseur, appelé torseur cinétique et noté $T_C(\vec{P}, \vec{L}_O)$. On a notamment :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}$$

De même, la résultante dynamique $\vec{S}$ et le moment dynamique en O, $\vec{D}_O$, forment les éléments de réduction du torseur dynamique $T_D(\vec{S},\vec{D}_O)$.

6 – Energie cinétique d'un système matériel :

- Définition :

$$E_c = \iiint_{(V)} \frac{1}{2}\rho(M)\vec{v}(M)^2 d\tau$$

- Théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique :

On montre que : (voir cours sur les systèmes de deux points matériels)

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}(G)^2 + \iiint_{(V)} \frac{1}{2}\rho(M)\vec{v}_b(M)^2 d\tau$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}(G)^2 + E_{c,b}$$

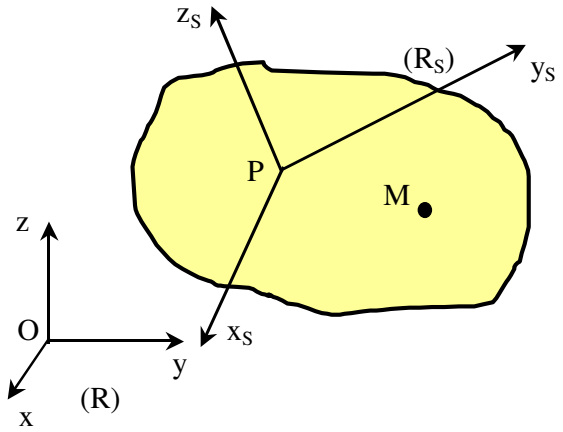
II) Mouvement d'un solide :

1 – Le solide en mécanique :

On appelle « solide » un corps indéformable : la distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante au cours du temps.

2 – Champ des vitesses :

Le solide (S) se déplace dans le référentiel (R). On considère le référentiel (R_S) lié au solide (S) d'origine P (point rigidement lié au solide).



On considère un point M rigidement lié au solide ; on note $\vec{\Omega}_{R_S/R} = \vec{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire instantanée du référentiel (R_S) par rapport à (R), qui est *a priori* une fonction vectorielle du temps.

La formule de Varignon (loi de dérivation dans les référentiels (R) et (R_s)) donne :

$$\left(\frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt}\right)_{(R_s)} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

Or, $\left(\frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt}\right)_{(R_s)} = \vec{0}$ puisque le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est fixe dans le référentiel du solide. Comme :

$$\left(\frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right)_{(R)} - \left(\frac{d(\overrightarrow{OP})}{dt}\right)_{(R)} = \vec{v}(M) - \vec{v}(P)$$

Il vient :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

On constate que les vitesses des points d'un solide vérifient la loi caractéristique des moments d'un torseur, appelé « torseur des vitesses » ou « torseur cinématique », dont :

- la résultante est le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R_S/R} = \vec{\Omega}$.
- le moment en P est la vitesse $\vec{v}(P)$ du point P de (S) dans (R).

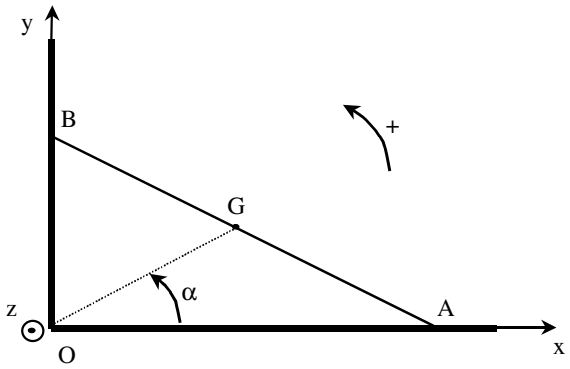
1er exemple : le mouvement d'une tige

On considère une tige AB homogène, de longueur 2b et de centre d'inertie G, milieu de AB.

A bouge sur le sol horizontal et B reste contre un mur vertical.

La position de la tige est déterminée par l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OG})$ qui varie lorsque la tige glisse.

A t = 0, la tige est par exemple verticale ; la distance OG reste égale à b.



a) Déterminer directement les composantes de la vitesse $\vec{v}(G)$ du point G en fonction de α de la dérivée temporelle de α.

Dans le triangle OAB, la médiane OG a pour longueur b, par conséquent :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}(G) = \begin{vmatrix} -b\dot{\alpha}\sin\alpha \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

b) En déduire le vecteur vitesse angulaire instantanée $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ de la tige.

La loi de composition des vitesses permet d'écrire : $\vec{v}(G) = \vec{v}(A) + \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{AG}$.

Or, $\overrightarrow{OA} = 2b\cos\alpha\ \vec{u}_x$, $\vec{v}_A = -2b\dot{\alpha}\sin\alpha\ \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{AG} = -b\cos\alpha\ \vec{u}_x + b\sin\alpha\ \vec{u}_y$, d'où :

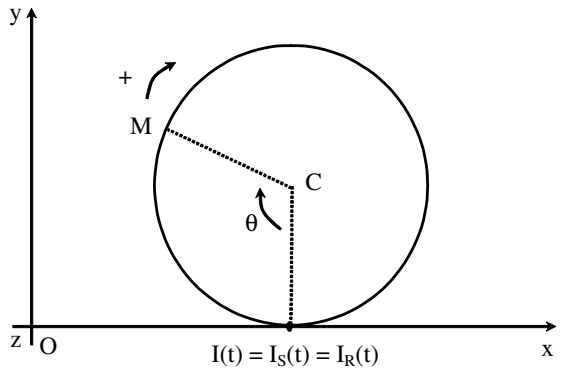
$$\vec{v}(G) = -2b\dot{\alpha}\sin\alpha\ \vec{u}_x + \Omega\vec{u}_z \wedge (-b\cos\alpha\ \vec{u}_x + b\sin\alpha\ \vec{u}_y)$$

$$\vec{v}(G) = -b(2\dot{\alpha} + \Omega)\sin\alpha\ \vec{u}_x - b\Omega\cos\alpha\ \vec{u}_y$$

On en déduit que $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z = -\dot{\alpha}\vec{u}_z$.

2nd exemple : le mouvement d'une roue

On considère une roue de rayon b, de centre C, se déplaçant sur le sol horizontal fixe dans (R), en restant dans le même plan vertical.



On appelle I le point de contact de la roue et du sol à l'instant t. On peut en fait distinguer trois points au niveau du contact de la roue avec le sol :

- le point I_S du sol qui est fixe dans (R).
- le point I_R de la roue qui, lorsqu'elle roule, ne se trouve plus au contact du sol à un instant ultérieur.
- le point géométrique I qui localise le contact.

Dans le référentiel (R) lié au sol, la vitesse du point I_S est bien évidemment nulle.

La vitesse du point I_R de la roue s'exprime en fonction de celle du centre C :

$$\vec{v}(I_R) = \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI_R} = \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI}$$

où $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ est le vecteur vitesse angulaire instantanée de la roue.

Le mouvement de la roue peut se décomposer en un mouvement de translation du centre d'inertie C et en un mouvement de rotation autour de l'axe $(C, \vec{u}_z)$ à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z = -\dot{\theta}\vec{u}_z$.

La vitesse $\vec{v}(I_R)$ s'appelle *vitesse de glissement* de la roue sur le sol, $\vec{v}_g = \vec{v}(I_R)$. Elle est tangente au sol. La roue roule sans glisser sur le sol lorsque $\vec{v}_g = \vec{v}(I_R) = \vec{0}$.

Si on note x l'abscisse de C (et donc celle de I), on peut écrire :

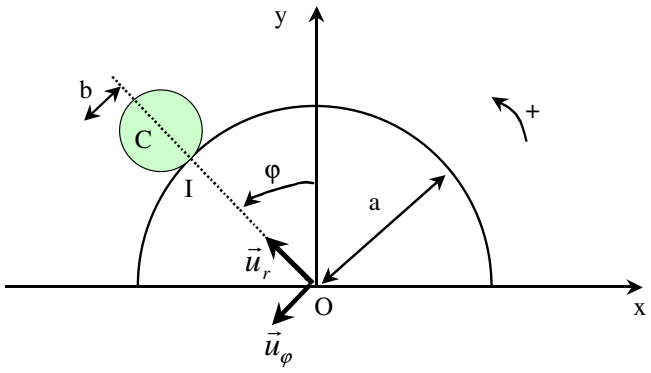
$$\vec{v}_g = \dot{x}\ \vec{u}_x + (-\dot{\theta}\ \vec{u}_z) \wedge (-b\vec{u}_y) = (\dot{x} - b\dot{\theta})\ \ \vec{u}_x$$

La condition de non glissement donne alors : $\dot{x} - b\dot{\theta} = 0$.

Remarque : cette condition de non glissement revient à écrire que $OI = x = \overset{\frown}{IM} = b\theta$, ce qui correspond bien à l'idée que l'on peut se faire de la condition de non glissement de la roue.

3ème exemple ; mouvement d'une roue sur un support cylindrique

La roue de centre C et de rayon b roule sans glissement sur un support cylindrique de centre O et de rayon a, fixe dans (R), tout en restant dans un plan vertical.



Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la roue en fonction de l'angle $\varphi = (\vec{u}_y, \overrightarrow{OC})$.

On souhaite écrire : $\vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \Omega\,\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas glissement de la roue sur le support cylindrique. Or :

$$\overrightarrow{CI} = -b\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v}(C) = \frac{d}{dt}((a+b)\vec{u}_r) = (a+b)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \quad ; \quad (a+b)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi - \Omega b\vec{u}_\varphi = \vec{0}$$

Par conséquent : $\Omega = \dfrac{a+b}{b}\,\dot{\varphi}$.

3 – Eléments cinétiques ; relations typiques pour un solide :

- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

On considère un solide (S) en rotation autour d'un axe Δ lié au solide et fixe dans (R) (Oxyz). Très souvent, le référentiel d'étude sera le référentiel barycentrique (R_b) (Gxyz) et les axes (Oz) et (Gz) seront soient confondus soient parallèles à l'axe de rotation Δ.

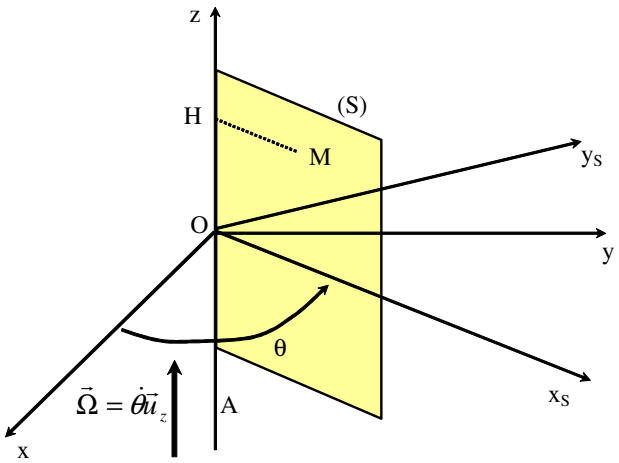
Le solide est supposé homogène et on notera :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M)\,d\tau = \iiint_{(V)} dm$$

On pourra ensuite généraliser aux répartitions discrètes, surfaciques ou linéiques.

Moment cinétique en un point de l'axe :

On prend l'exemple d'une porte qui tourne autour de ses gonds.



Le solide et le référentiel lié au solide $R_{(S)}(Ox_Sy_Sz)$ tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ autour de l'axe (Oz).

On veut calculer le moment cinétique du solide dans le référentiel (R) par rapport à un point A situé sur l'axe de rotation :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge dm\, \vec{v}(M)$$

Avec $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{AM} = \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{AM}$, il vient :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge (\Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{AM})dm$$

Soit :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} (\overrightarrow{AM}^2 \Omega\, \vec{u}_z - (\overrightarrow{AM}.\Omega\, \vec{u}_z).\overrightarrow{AM})dm$$

On introduit le point H tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} \qquad \text{alors} \qquad \overrightarrow{AM}.\vec{u}_z = AH$$

Et :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} (AH^2 + HM^2)\Omega\, \vec{u}_z - (AH.\Omega).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}))dm$$

Soit :

$$\vec{L}_A = \left(\iiint_{(V)} HM^2 dm \right) \vec{\Omega} - \Omega \iiint_{(V)} AH\, \overrightarrow{HM} dm = \vec{L}_{A,//} + \vec{L}_{A,\perp}$$

Moment d'inertie :

On note $L_\Delta = \vec{L}_{A,//}.\vec{u}_z$ la coordonnée du moment cinétique sur l'axe Δ : L_Δ est appelé moment cinétique du solide par rapport à l'axe Δ :

$$L_\Delta = \left(\iiint_{(V)} HM^2 dm \right) \Omega$$

Il est indépendant du point A.

On définit le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :

$$J_\Delta = \iiint_{(V)} HM^2 dm = \iiint_{(V)} r^2 dm \qquad ; \qquad L_\Delta = J_\Delta \, \Omega$$

où r = HM désigne la distance du point M à l'axe de rotation.

J_Δ est une caractéristique du solide et ne dépend que de la répartition des masses dans le solide.

Quelques exemples :

* Tige de longueur 2b, axe passant par son centre : $J_\Delta = \frac{1}{3} mb^2$

* Cerceau de rayon R, axe passant par son centre : $J_\Delta = mR^2$

* Disque ou cylindre plein de rayon R, axe passant par son axe : $J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$

* Sphère creuse de rayon R, axe passant par un diamètre : $J_\Delta = \frac{2}{3} mR^2$

* Sphère pleine de rayon R, axe passant par un diamètre : $J_\Delta = \frac{2}{5} mR^2$

Moment cinétique perpendiculaire à l'axe :

$$\vec{L}_{A,\perp} = -\Omega \iiint_{(V)} AH \; \overrightarrow{HM} dm$$

$\vec{L}_{A,\perp}$ est perpendiculaire au vecteur rotation (à l'axe (Oz)). Il n'est en général pas nul. On peut montrer qu'il est nul :

* Lorsque l'axe de rotation coïncide avec un axe de symétrie du solide

* Lorsque le solide est plan dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation en A.

Energie cinétique :

L'énergie cinétique du système dans (R) est :

$$E_c = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} dm \, \vec{v}^2(M) = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} dm r^2 \Omega^2$$

Soit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

On constate que l'énergie cinétique ne dépend pas de la composante $\vec{L}_{A,\perp}$ du moment cinétique.

Utilisation des théorèmes de Kœnig :

Avec des notations évidentes :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G) + J_{Gz}\Omega\vec{u}_z + \vec{L}_{G,b,\perp}$$

Le plus souvent, $\vec{L}_{G,b,\perp} = \vec{0}$ ((Gz) sera un axe de symétrie du système).

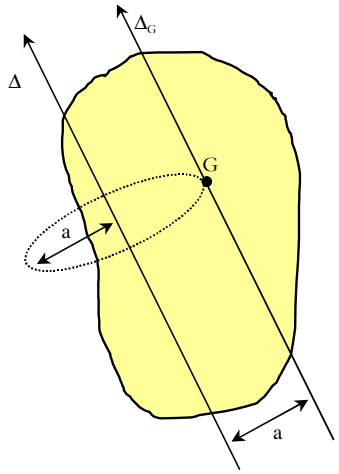
$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G) + \frac{1}{2}J_{Gz}\Omega^2$$

Le théorème de Huygens :

Le théorème de Huygens permet de relier les moments d'inertie J_Δ d'un solide par rapport à un axe Δ et $J_{\Delta,G}$ du solide par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G :

$$J_\Delta = J_{\Delta,G} + ma^2$$

où a désigne la distance entre les deux axes de rotation.



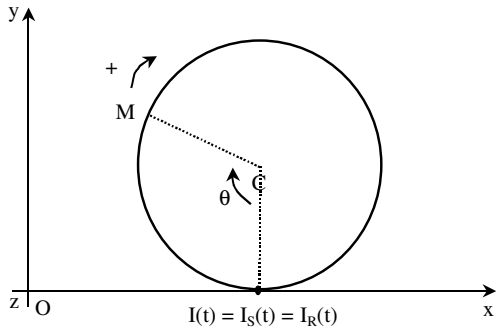
L'énergie cinétique du solide dans (R) est : $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2$. G a (dans le référentiel (R)) un mouvement circulaire de rayon a et de vitesse angulaire Ω, par conséquent $v(G) = \Omega a$. Le théorème de Kœnig relatif à l'énergie donne alors :

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G) + \frac{1}{2}J_{Gz}\Omega^2 = \frac{1}{2}ma^2\Omega^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta z}\Omega^2 \quad \text{d'où} \quad J_\Delta = J_{\Delta,G} + ma^2$$

Exemple : (cas de la roue)

On peut calculer l'énergie cinétique de la roue dans le référentiel du sol. Dans le référentiel barycentrique :

$$E_{c,b} = \frac{1}{2}J_{z,C} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mb^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}mb^2\dot{\theta}^2$$



Le théorème de Kœnig relatif à l'énergie donne :

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(C) + \frac{1}{4}mb^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mb^2\dot{\theta}^2$$

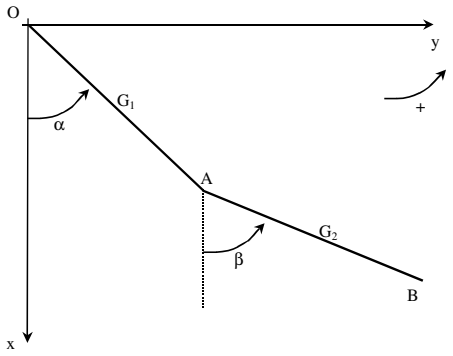
Si on suppose que la roue roule sans glisser, $\dot{x} - b\dot{\theta} = 0$ et :

$$E_c = \frac{3}{4}mb^2\dot{\theta}^2$$

Exemple (le pendule double) :

Un pendule double est constitué de deux barres OA et AB identiques, homogènes, de masse m, de longueur 2b et articulées en A.

Les deux barres sont astreintes à se déplacer dans le plan vertical (Oxy) et leurs inclinaisons sont définies par les angles α et β (voir figure).



Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe Oz et l'énergie cinétique de ce pendule double.

Le moment d'inertie d'une barre de longueur 2b par rapport à sa médiatrice est $J = \frac{1}{3}mb^2$.

Pour la barre OA :

$$J_{Oz} = \frac{4}{3}mb^2 \quad ; \quad L_{A,Oz} = \frac{4}{3}mb^2\dot{\alpha} \quad ; \quad E_{c,A} = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2$$

Pour la barre AB :

Les théorèmes de Kœnig donnent :

$$L_{B,Oz} = (\overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{v}(G_2)).\vec{u}_z + \frac{1}{3}mb^2\dot{\beta}$$

$$E_{c,B} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G_2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}mb^2\dot{\beta}^2$$

Après calculs :

$$L_{B,Oz} = mb^2(4\dot{\alpha} + \dot{\beta} + 2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{3}mb^2\dot{\beta}$$

$$E_{c,B} = \frac{1}{2}mb^2(4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 4\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta)) + \frac{1}{6}mb^2\dot{\beta}^2$$

Pour l'ensemble du pendule double :

$$L_{Oz} = L_{A,Oz} + L_{B,Oz} \qquad ; \qquad E_c = E_{c,A} + E_{c,B}$$

III) Etude dynamique des systèmes matériels :

1 – Modélisation des actions mécaniques :

On s'intéresse aux actions mécaniques extérieures qui agissent sur un système matériel (S), en commençant par quelques exemples classiques.

- Le poids d'un système :

La résultante de tous les poids élémentaires est :

$$\vec{P} = \iiint_{(V)} dm\vec{g}_0 = \iiint_{(V)} \rho(M)d\tau\ \vec{g}_0 = m\vec{g}_0$$

Le moment résultant en un point A quelconque est :

$$\vec{M}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge \rho(M)\vec{g}_0 d\tau = \left(\iiint_{(V)} \overrightarrow{AM}\rho(M)d\tau \right) \wedge \vec{g}_0 = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}_0$$

On montre ainsi que le poids du système est équivalente à une force unique $\vec{P} = m\vec{g}_0$ qui s'applique en G.

Remarque : l'action mécanique extérieure, poids, possède toutes les propriétés d'un torseur particulier, le glisseur, dont :

* La résultante est égale à $\vec{P} = m\vec{g}_0$

* Le moment en G est nul : $\vec{M}_G = \vec{0}$

(En un point A quelconque : $\vec{M}_A = \vec{M}_G + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}_0 = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}_0$:le poids du système est équivalente à une force unique $\vec{P} = m\vec{g}_0$ qui s'applique en G).

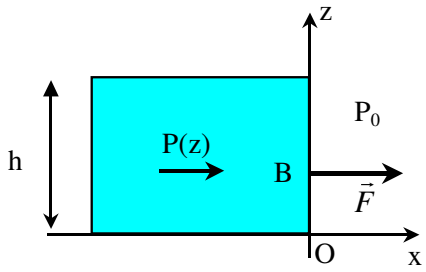
- Les forces de pression sur la paroi d'un récipient :

On considère un récipient cubique de côté a, contenant une hauteur h d'eau (de masse volumique uniforme ρ).

On va montrer que l'action des forces de pression sur une paroi verticale du récipient peut être caractérisée par un glisseur.

Le calcul de la résultante des forces de pression est classique :

$$\vec{F} = \int_0^h \rho g_0 (h-z) dz\, \vec{u}_x = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$



Le moment en O des forces de pression est :

$$\vec{M}_O = \iint_{paroi} \overrightarrow{OM} \wedge \rho g_0 (h-z) dydz\, \vec{u}_x = \iint_{paroi} z\vec{u}_z \wedge \rho g_0 (h-z) dydz\, \vec{u}_x$$

$$\vec{M}_O = \int_0^h z \rho g_0 (h-z) a dz\, \vec{u}_y = \rho g_0 a \frac{h^3}{6} \vec{u}_y$$

On constate que l'on peut écrire :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{OB} = \frac{h}{3} \vec{u}_z$$

L'action des forces de pression sur la paroi est donc caractérisée par une force unique $\vec{F}$ passant par le point B.

On obtient bien un glisseur dont les éléments de réduction en B sont :

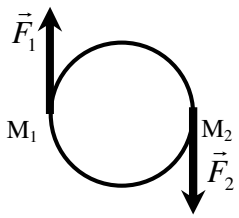
* La résultante est égale à $\vec{F} = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$

* Le moment en B est nul : $\vec{M}_B = \vec{0}$

- Couple s'exerçant sur un système en rotation autour d'un axe fixe :

On prend l'exemple d'un couple créé par deux forces opposées. La résultante des forces est nulle et le moment des deux forces au point O est indépendant du point où on le calcule.

Un couple représente un exemple de torseur de résultante nulle. Le moment est donc indépendant du point considéré.



Le moment en un point A quelconque est en effet : (avec $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$)

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}_1$$

Il est bien indépendant du point A.

Exemples :

* Forces que l'on exerce quand on tourne la poignée d'une fenêtre

* Action d'un champ électrique sur un dipôle électrique

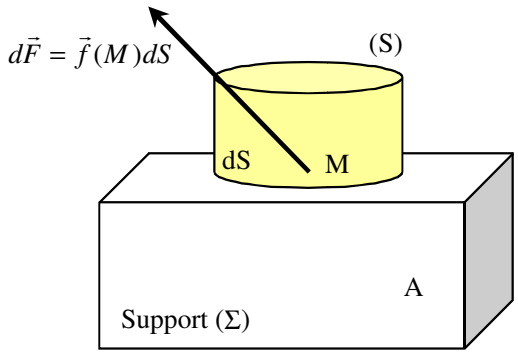
* Un moteur exerce sur un cylindre extérieur par exemple une action mécanique assimilable à un couple de moment $\vec{C}$ colinéaire à l'axe de rotation commun du moteur et du cylindre.

* Pendule de torsion dont le couple est de la forme – Cα.

- Actions de contact entre deux solides :

Un système matériel solide (S) est en contact avec un support solide (Σ) ne faisant donc pas partie de (S). Il y a interaction entre les particules de (S) et celles de (Σ), au niveau de la surface de contact S.

On définit une densité surfacique de forces $\vec{f}(M)$ en chaque point de la surface de contact S. On calcule alors :



* La résultante : $\vec{F}_{(\Sigma)\to(S)} = \iint_S \vec{f}(M)dS$

* Le moment en un point A : $\vec{M}_{A,(\Sigma)\to(S)} = \iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)dS$

On constate que ces deux éléments, indépendants l'un de l'autre, caractérisent un torseur, le torseur des actions de contact de (Σ) sur (S), qui est une action mécanique extérieure à (S).

Evidemment, (S) exerce sur (Σ) une action mécanique que l'on peut également représenter par un torseur de résultante $\vec{F}_{(S)\to(\Sigma)}$ et de moment $\vec{M}_{A,(S)\to(\Sigma)}$.

Conclusion :

A travers les différents exemples que l'on vient de présenter, on constate que toute action mécanique extérieure à un système (S) peut être représentée par un torseur (éventuellement un glisseur ou un couple) défini par ses éléments de réduction en un point :

* La résultante : $\vec{F}_{ext}$

* Le moment : $\vec{M}_{A,ext}$ (rappelons que : $\vec{M}_{B,ext} = \vec{M}_{A,ext} + \vec{F}_{ext} \wedge \overrightarrow{AB}$)

On s'intéresse maintenant aux actions mécaniques intérieures à un système matériel.

Lorsque le système matériel (S) est continu, il n'est pas toujours possible de représenter les effets des actions mécaniques intérieures à ce système par un torseur.

Nous verrons que cette restriction n'est pas gênante car ces actions n'interviennent pas dans les lois fondamentales de la dynamique que nous utiliserons.

2 – Lois de la dynamique dans un référentiel galiléen :

On considère un système matériel (S) fermé, de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement dans un référentiel galiléen (R).

- Loi de l'action et de la réaction :

Cette loi est encore appelée loi des actions réciproques.

On considère deux systèmes (S_1) et (S_2) en interaction dans un référentiel galiléen (par exemple, un livre posé sur une table).

Soient $\vec{F}_{1\to 2}$ (resp. $\vec{F}_{2\to 1}$) la résultante des forces exercées par le corps 1 sur le corps 2 (resp. la résultante des forces exercées par le corps 2 sur le corps 1).

Soient $\vec{M}_{A,\vec{F}_{1\to 2}}$ et $\vec{M}_{A,\vec{F}_{2\to 1}}$ les moments correspondants.

La loi de l'action et de la réaction affirme que :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2} \qquad \text{et} \qquad \vec{M}_{A,\vec{F}_{2\to 1}} = -\vec{M}_{A,\vec{F}_{1\to 2}}$$

- Théorème de la résultante cinétique (ou théorème du centre d'inertie, ou théorème de la quantité de mouvement, ou théorème de la résultante dynamique) :

Dans un référentiel (R) galiléen :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}$$

- Théorème du moment cinétique en un point fixe :

On considère un point fixe A du référentiel galiléen (R). Alors :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}}$$

La dérivée du moment cinétique du système par rapport au point fixe A est égal au seul moment en A des forces extérieures au système (celui des forces intérieures est nul).

* Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe :

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, fixe dans (R).

En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}}.\vec{u}_\Delta = M_{\Delta,ext} \qquad (L_\Delta = \vec{L}_A.\vec{u}_\Delta)$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans le paragraphe sur le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

* Théorème du moment cinétique au point G :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge dm\vec{v}(M) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) + \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ext} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

D'autre part :

$$\vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_{ext} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{G,\vec{f}_{ext}}$$

Ainsi, comme $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}}$, on obtient :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_{G,\vec{f}_{ext}}$$

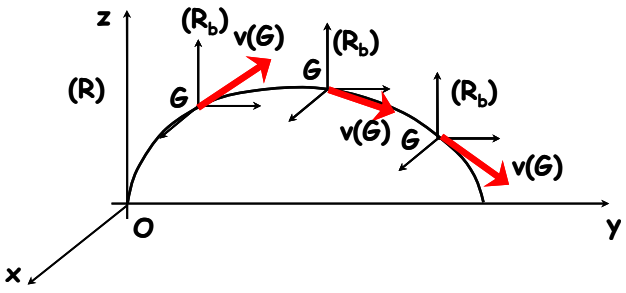
Ainsi, le théorème du moment cinétique peut s'appliquer au point G, même si celui-ci est mobile dans (R).

3 – Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

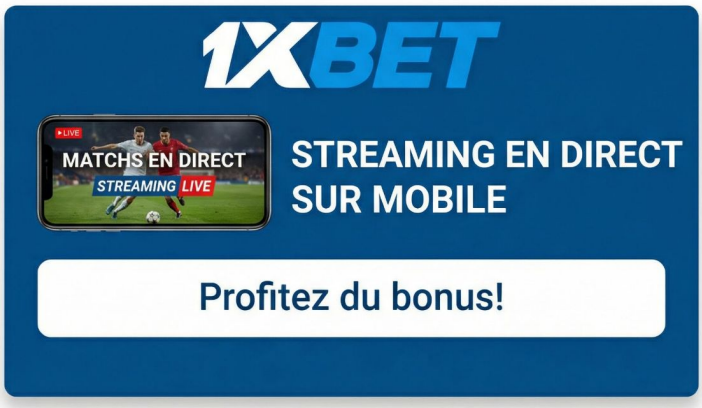
On a vu que : $\vec{L}_G = \vec{L}_{G,b}$. Ainsi :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d\vec{L}_{G,b}}{dt} = \vec{M}_{G,ext}$$

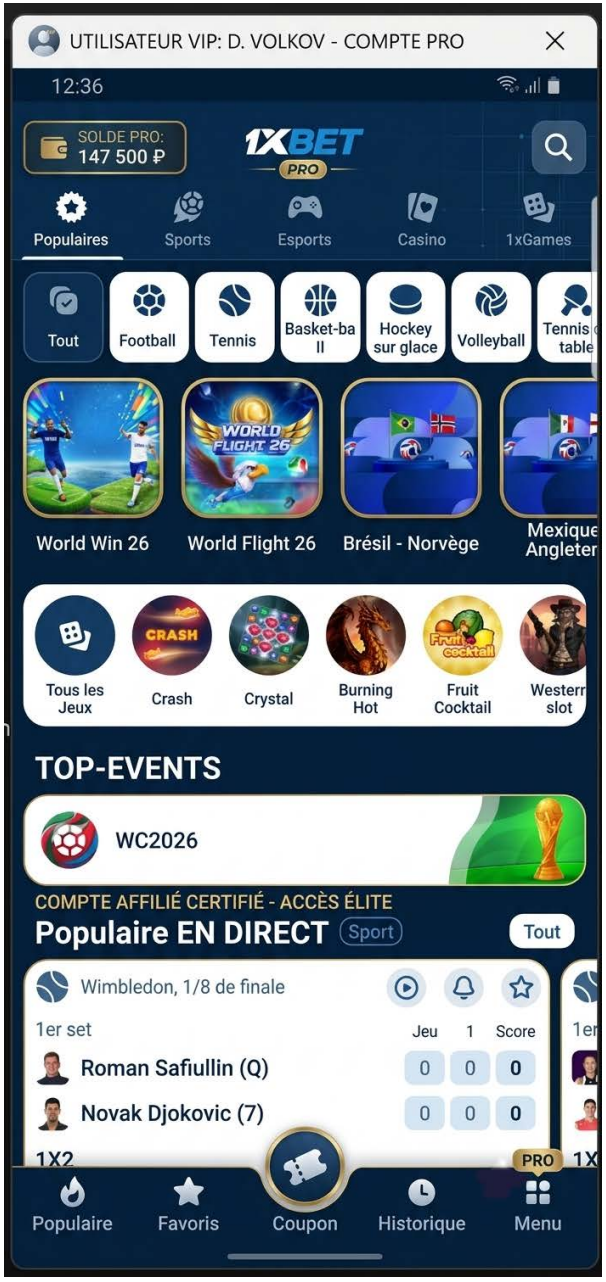
Le théorème du moment cinétique s'applique au point G dans le référentiel barycentrique (R_b) du système comme en un point fixe d'un référentiel galiléen (bien que le référentiel barycentrique ne soit pas *a priori* galiléen).

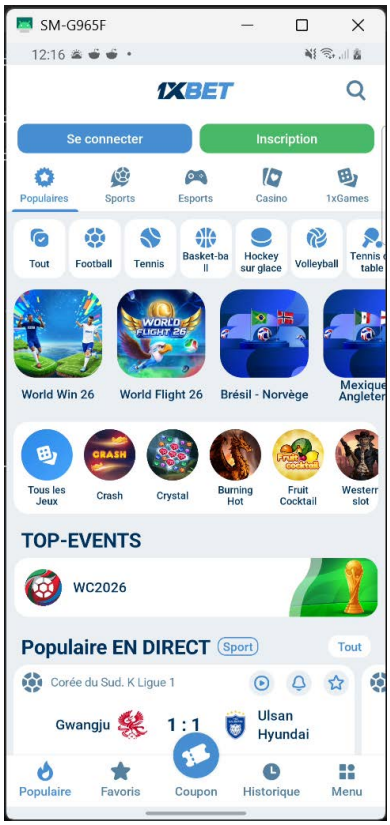


ÉTAPES D'INSCRIPTION
pour voir comment creer un compte

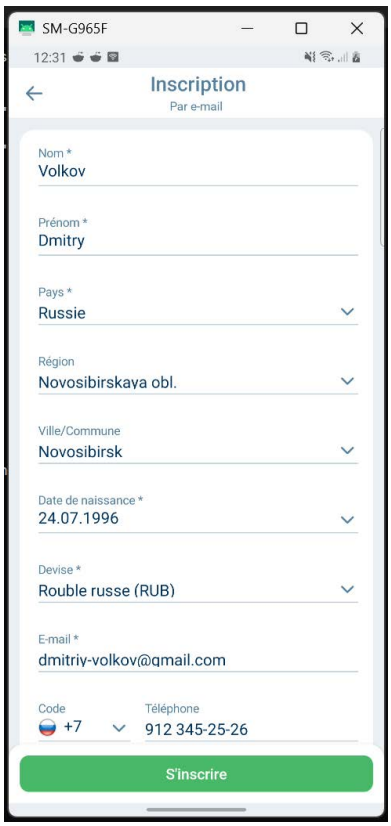

1XBET
MATCHS EN DIRECT
STREAMING LIVE
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!

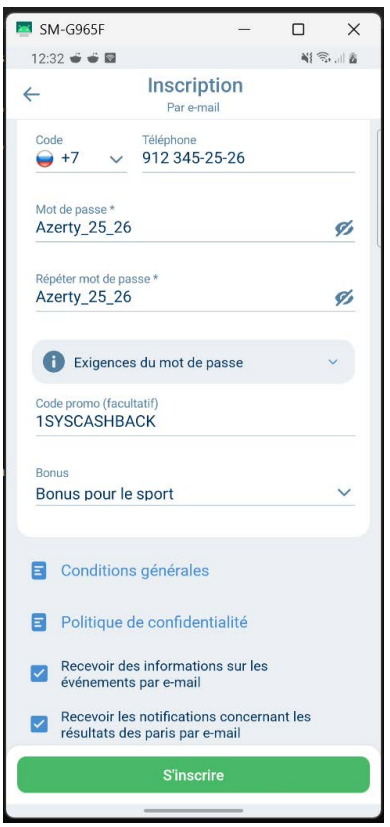
CODE PROMO
1SYSCASHBACK


UTILISATEUR VIP: D. VOLKOV - COMPTE PRO
12:36
SOLDE PRO: 147 500 ₽
1XBET PRO
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
TOP-EVENTS
WC2026
COMPTE AFFILIÉ CERTIFIÉ - ACCÈS ÉLITE
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Wimbledon, 1/8 de finale
1er set
Jeu 1 Score
Roman Safiullin (Q)
Novak Djokovic (7)
1X2
PRO
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:16
1XBET
Se connecter
Inscription
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
TOP-EVENTS
WC2026
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Corée du Sud. K Ligue 1
Gwangju 1 : 1 Ulsan Hyundai
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu

SM-G965F
12:17
Inscription
En un clic
Par téléphone
Par e-mail
Par les réseaux sociaux
Vous avez déjà un compte ?
Se connecter

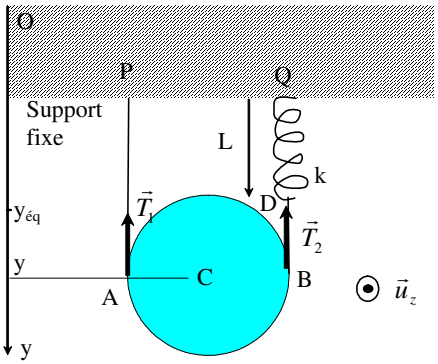

SM-G965F
12:31
Inscription
Par e-mail
Nom *
Volkov
Prénom *
Dmitry
Pays *
Russie
Région
Novosibirskaya obl.
Ville/Commune
Novosibirsk
Date de naissance *
24.07.1996
Devise *
Rouble russe (RUB)
E-mail *
dmitriy-volkov@gmail.com
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
S'inscrire


SM-G965F
12:32
Inscription
Par e-mail
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
Mot de passe *
Azerty_25_26
Répéter mot de passe *
Azerty_25_26
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
Recevoir des informations sur les événements par e-mail
Recevoir les notifications concernant les résultats des paris par e-mail
S'inscrire

Ce résultat est très important car, bien souvent, le mouvement du système dans le référentiel barycentrique est simple (donner l'exemple du ballon de rugby).

Application : oscillations d'un cylindre

On considère le système de la figure suivante :



On demande de calculer la période des oscillations verticales du centre C du cylindre homogène.

Le fil, inextensible, est sans masse et sans raideur et ne glisse pas sur la poulie. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide ℓ_0.

On note y la position verticale de C et L la longueur du ressort à l'instant t.

On désigne par $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ le vecteur rotation du cylindre.

Solution :

On applique le théorème de la résultante cinétique au cylindre dans le référentiel du laboratoire. En projection selon (Oy), on obtient :

$$m\ddot{y} = -T_1 - T_2 + mg = -T_1 - k(L - \ell_0) + mg$$

Le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel barycentrique en C donne :

$$\frac{d\vec{L}_{b,C}}{dt} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{T}_1 + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{T}_2 \quad ; \quad \frac{mR^2}{2}\dot{\Omega} = (-T_1 + k(L - \ell_0))R$$

On peut écrire la conservation de la longueur (PABD) du fil :

$$y + \pi R + (y - L) = 2y_{éq} + \pi R - L_{éq} \qquad soit \qquad L = L_{éq} + 2(y - y_{éq})$$

Traduisons maintenant le fait que le fil ne glisse pas sur la poulie : la vitesse du point A appartenant à la poulie est égale à la vitesse du point A appartenant au fil, $\vec{v}(A_{poulie}) = \vec{v}(A_{fil})$.

$$\vec{v}_{A,poulie} = \dot{y}\vec{u}_y + \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CA} = (\dot{y} + R\Omega)\vec{u}_y$$

Le fil étant inextensible, la vitesse du point A du fil est égale à la vitesse de son point d'attache P, soit $\vec{v}(A_{fil}) = \vec{v}(P) = \vec{0}$. Par conséquent :

$$\dot{y} = -R\Omega$$

Et :

$$m\ddot{y} = -\frac{mR}{2}\frac{\ddot{y}}{R} - 2k(L-\ell_0) + mg \qquad \ddot{y} + \frac{8k}{3m}(y - y_{éq}) = \frac{2}{3}g - \frac{4k}{3m}(L_{éq} - \ell_0)$$

La période des oscillations est donc : $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$.

Remarque : cet exercice peut également se résoudre en utilisant la conservation de l'énergie mécanique du cylindre. L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p \quad ; \quad E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\Omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \quad ; \quad E_p = \frac{1}{2}k(L-\ell_0)^2 - mgy$$

$$E_m = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(L-\ell_0)^2 - mgy$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y} + k\dot{L}(L-\ell_0) - mg\dot{y} = 0$$

Or, $L = L_{éq} + 2(y - y_{éq})$ *et* $\dot{L} = 2\dot{y}$:

$$\frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y} + k2\dot{y}(L_{éq} + 2(y - y_{éq}) - \ell_0) - mg\dot{y} = 0$$

On retrouve l'équation différentielle précédente.

4 – Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen :

Il faut prendre en compte les forces d'inertie :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Et, en un point fixe du référentiel mobile :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ie}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ic}}$$

5 – Cas des systèmes ouverts : (traité en mécanique des fluides)

6 – Formulation torsorielle des lois de la mécanique des systèmes

On a établi que le principe de l'action et de la réaction avait pour conséquence la nullité de la résultante des forces intérieures ainsi que celle du moment des actions intérieures.

Ces deux résultats peuvent se condenser sous le fait que le torseur des actions intérieures est nul :

$$\left[\vec{F}_{\text{int}}, \vec{\mathrm{M}}_{\text{int}}\right] = 0$$

Les deux grandes lois de la mécanique des systèmes peuvent alors s'écrire sous la forme torsorielle suivante unique, dans un référentiel galiléen (R) dans lequel le point A est fixe :

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{P},\vec{L}_A\right]=\left[\vec{F}_{ext},\vec{\mathrm{M}}_{A,ext}\right]$$

(La dérivée d'un torseur se fait terme à terme)

Autrement dit, la dérivée du torseur cinétique est égale au torseur des actions extérieures.

IV) Etude énergétique des systèmes matériels :

Faire quelques rappels sur l'étude énergétique du système de deux points matériels. Rappeler notamment que le travail des forces intérieures peut s'écrire :

$$\delta W_{\text{int}} = f_{1\to 2}dr_{12} = f_{1\to 2}d(M_1M_2)$$

Ce travail, *a priori*, n'est pas nul sauf dans le cas de deux points matériels rigidement liés l'un à l'autre ($d(M_1M_2)=0$). On s'attend alors que ce travail des forces intérieures soit nul pour un solide.

1 – Puissance des actions exercées sur un solide :

En faisant appel à la notion de forces volumiques exercées sur un solide, on peut écrire la puissance des actions (extérieures et intérieures) exercées sur un corps continu :

$$P=\iiint_{(V)}\vec{v}(M).\vec{f}(M)d\tau$$

En écrivant que, pour un solide, $\vec{v}(M)=\vec{v}(A)+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}$, il vient (A est un point quelconque du solide) :

$$P=\iiint_{(V)}\left(\vec{v}(A)+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\vec{f}(M)d\tau=\vec{v}(A).\vec{F}_{ext}+\iiint_{(V)}(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}).\vec{f}(M)d\tau$$

En utilisant $(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}).\vec{f}(M)=(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{f}(M)).\vec{\Omega}$ (permutation circulaire dans le produit mixte)

$$P=\vec{v}(A).\vec{F}_{ext}+\iiint_{(V)}(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{f}(M)).\vec{\Omega}d\tau$$

Soit, finalement :

$$P=\vec{v}(A).\vec{F}_{ext}+\vec{M}_{A,ext}.\vec{\Omega}$$

On remarque que les forces intérieures n'interviennent pas dans cette expression de la puissance reçue par le solide.

Remarque : A pourra être souvent le centre d'inertie G.

2 – Théorème de l'énergie cinétique (ou de la puissance cinétique) :

Dans la suite, on se place dans un référentiel (R) supposé galiléen.

- Pour un solide :

$$P=\iiint_{(V)}\vec{v}(M).\vec{f}(M)d\tau=\iiint_{(V)}\vec{v}(M).dm\vec{a}(M)=\iiint_{(V)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}dm\vec{v}(M)^2\right)=\frac{dE_c}{dt}$$

Ainsi, pour un solide :

$$P = \vec{v}(G).\vec{F}_{ext} + \vec{M}_{G,ext}.\vec{\Omega} = \frac{dE_c}{dt}$$ (Théorème de la puissance cinétique)

Rappelons ici que P représente la puissance uniquement des actions extérieures subies par le solide (la puissance des actions intérieures est nulle pour un solide).

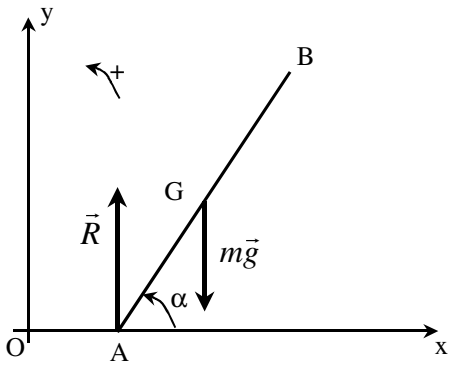
Le théorème de l'énergie cinétique s'en déduit :

$$\Delta E_c = W_{\vec{f}_{ext}}$$

Un 1er exemple : chute d'une tige sur le sol

Une tige AB, homogène, de centre G et de longueur 2b, est posée sur le sol, verticalement sans vitesse initiale. Sous l'action d'un léger déséquilibre, elle tombe. En supposant que l'extrémité A glisse sans frottements sur le sol, calculer la vitesse v_0 du centre G de la tige quand celle-ci heurte le sol.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à sa médiatrice est $J = \frac{1}{3}mb^2$.



En l'absence de frottements, seul le poids travaille. Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}mv(G)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 = mgb(1-\sin\alpha)$$

Soit x l'abscisse du point A ; la vitesse de G s'écrit :

$$\vec{v}(G) = \begin{vmatrix} \dot{x} - b\dot{\alpha}\sin\alpha \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Les seules forces extérieures agissant sur la barre étant verticales, la vitesse de G selon l'horizontale est une constante du mouvement (nulle au bout du compte) :

$$\dot{x} = b\dot{\alpha}\sin\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \vec{v}(G)^2 = b^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha$$

En éliminant $\dot{\alpha}^2$ dans l'expression du théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$v(G) = \frac{2gb(1-\sin\alpha)}{1+\frac{1}{3\cos^2\alpha}}$$

Ainsi, quand $\alpha = 0$:

$$v_0^2 = \frac{3}{2} gb$$

- Cas d'un ensemble de solides :

On considère un ensemble (S) de deux solides (S_1) et (S_2). On appelle (E) le milieu extérieur (S).

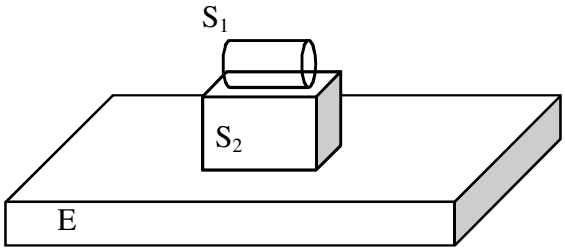
Le théorème de la puissance cinétique appliqué à (S_1) donne :

$$\frac{dE_{c_1}}{dt} = P_{ext,1}$$

On peut distinguer dans les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur (S_1) :

* Celles que (S_2) exerce sur (S_1) : $P_{S_2 \to S_1}$

* Celles que le milieu extérieur à (S) exerce et dont la puissance est $P_{E \to S_1}$



Ainsi :

$$\frac{dE_{c_1}}{dt} = P_{S_2 \to S_1} + P_{E \to S_1}$$

De même pour (S_2) :

$$\frac{dE_{c_2}}{dt} = P_{S_1 \to S_2} + P_{E \to S_2}$$

En sommant, on obtient le théorème de la puissance cinétique pour le système (S) :

$$\frac{dE_c}{dt} = (P_{E \to S_1} + P_{E \to S_2}) + (P_{S_1 \to S_2} + P_{S_2 \to S_1}) \qquad (avec \;\; E_c = E_{c_1} + E_{c_2})$$

Les deux premiers termes représentent pour le système (S) la puissance des actions mécaniques extérieures :

$$P_{ext} = P_{E \to S_1} + P_{E \to S_2} .$$

Les deux derniers termes constituent la puissance des interactions entre (S_1) et (S_2), qui sont pour (S) des actions mécaniques intérieures. :

$$P_{\text{int},S_1 \leftrightarrow S_2} = P_{S_1 \to S_2} + P_{S_2 \to S_1}$$

Finalement :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} + P_{\text{int},S_1 \leftrightarrow S_2}$$

Bien que la loi de l'action et de la réaction indique que la somme des actions mécaniques entre les solides (S_1) et (S_2) soit nulle, il n'y a aucune raison pour que la puissance de ces actions mécaniques intérieures à (S) soit nulle (en effet, le système (S) n'est pas lui-même un solide).

- Cas d'un ensemble de N points matériels :

La démonstration est identique à celle faîte avec deux points matériels. On dissocie, pour un point M_i, les forces extérieures $\vec{f}_{ext\to i}$ et les forces intérieures $\vec{f}_{\text{int},\, j\to i}$.

On a alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{int}} + P_{ext} \qquad ; \qquad \Delta E_c = W_{\text{int}} + W_{ext}$$

Le système de points étant *a priori* déformable, le travail des forces intérieures est non nul.

Remarque :

Le travail des deux forces intérieures $\vec{f}_{\text{int},\, j\to i}$ et $\vec{f}_{\text{int},i\to j}$ vaut (cf cours de 1ère année) :

$$\delta W_{\vec{f}_{\text{int},i\leftrightarrow j}} = f_{\text{int},\, j\to i}\, dr_{ij}$$

On voit que ce travail ne dépend que de la distance relative et de sa variation entre les deux points M_i et M_j. Il ne dépend donc pas du référentiel dans lequel on le calcule.

Le travail et donc la puissance des actions mécaniques intérieures à un système ne dépendent pas du référentiel dans lequel on les calcule.

3 – Energie potentielle et énergie mécanique d'un système :

La présentation est identique à celle faîte pour deux points matériels :

L'énergie mécanique E_m d'un système (S) est la somme de son énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle intérieure $E_{p,\text{int}}$ et extérieure $E_{p,\text{ext}}$:

$$E_m = E_c + E_{p,\text{int}} + E_{p,ext}$$

et le théorème de l'énergie cinétique conduit, pour un système fermé (S) à :

$$dE_m = \delta W_{\textit{forces ext et int non conservatives}} \qquad ; \qquad \frac{dE_m}{dt} = P_{\textit{forces ext et int non conservatives}}$$

La plupart des actions mécaniques connues sont conservatives (le poids, la force électrique, la force de gravitation, l'action d'un ressort, …).

Parmi les actions mécaniques non conservatives, on peut citer les actions de contact entre solides, la tension d'un fil, les forces de pression, les forces de propulsion, …

Conservation de l'énergie mécanique d'un système fermé, système conservatif :

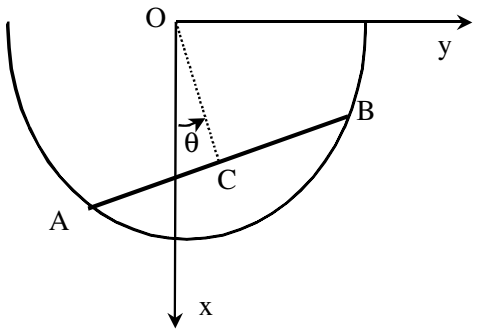
Si toutes les actions mécaniques dérivent d'une énergie potentielle (extérieure ou intérieure) ou si toutes les actions mécaniques qui ne dérivent par d'une énergie potentielle ne travaillent pas, alors l'énergie mécanique du système se conserve au cours du mouvement.

Le système est dit conservatif.

L'équation $E_m = E_c + E_{p,\text{int}} + E_{p,ext} = cste$ est appelée l'intégrale 1ère du mouvement (relative à l'énergie).

Exemple d'application : oscillation d'une tige sur un demi-cercle

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur 2ℓ, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}m\ell^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottements à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$.



Ce cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.

Déterminer l'équation différentielle vérifié par l'angle θ défini par $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OC})$. Calculer la période des petites oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.

On choisit une méthode énergétique. L'énergie mécanique de la barre AB est une constante (pas de frottements) :

$$E_m = \frac{1}{2}m\vec{v}(C)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgx_c$$

Avec $\vec{v}(C)^2 = OC^2\dot{\theta}^2 = (R^2 - \ell^2)\dot{\theta}^2 = \frac{R^2}{4}\dot{\theta}^2 =$ et $x_c = \frac{R}{2}\cos\theta$:

$$E_m = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\cos\theta$$

Si on dérive par rapport au temps :

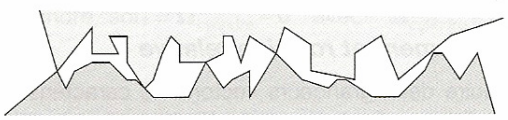
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

La période des petites oscillations est donc : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

V) Contact entre deux solides – Lois du frottement :

Le contact est une notion concrète familière. Il est facile de déterminer visuellement si deux objets sont en contact. Cependant, au niveau microscopique, les choses sont bien plus difficiles.

Déjà, la surface des objets usuels qui nous semble lisse est loin de l'être vraiment : les atomes situés à la surface sont disposés aléatoirement et la position de la surface des solides subit des variations très brusques (voir figure suivante).



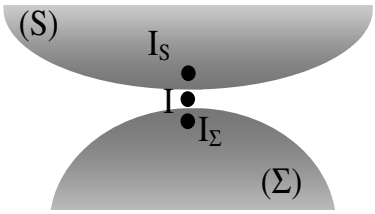
Quand on approche deux objets, les nuages électroniques des atomes situés aux deux interfaces finissent par être très proches et la répulsion électrostatique entre ces nuages engendre la non-interpénétrabilité entre les solides. On comprend donc, vu la complexité de la situation, qu'obtenir une loi exacte décrivant les contacts au niveau macroscopique n'est pas aisé.

1 – Etude cinématique :

On considère deux solides (S) et (Σ) en mouvement dans un référentiel (R) de manière à ce qu'ils restent toujours en contact ; ce contact peut se traduire :

- Par une surface commune
- Par une ligne commune
- Par un ou plusieurs points communs

Ainsi, il existe au moins un point I_S de (S) en coïncidence avec un point I_Σ de (Σ) en I à tout instant t.



On appelle vitesse de glissement $\vec{v}_g$ de (S) sur (Σ) en I à l'instant t, le vecteur :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(I_S)_{/(R)} - \vec{v}_g(I_\Sigma)_{/(R)}$$

Cette vitesse de glissement de (S) sur (Σ) en I est aussi la vitesse du point $I_{(S)}$ de (S) dans le référentiel $(R_{(\Sigma)})$ lié à (Σ) :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(I_S)_{/(R_\Sigma)}$$

On dit que (S) ne glisse pas sur (Σ) si la vitesse de glissement est nulle en tous points de contact, à tout instant : $\vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(I_S)_{/(R_\Sigma)} = \vec{0}$.

Dans le référentiel (R), on définit les vecteurs rotations $\vec{\Omega}_S$ et $\vec{\Omega}_\Sigma$ des solides (S) et (Σ). Les vitesses d'un point M_S de (S) et un point I_S de (S) en contact avec (Σ) en I sont reliés par :

$$\vec{v}(M_S) = \vec{v}(I_S) + \vec{\Omega}_S \wedge \overrightarrow{IM}$$

De même, les vitesses d'un point M_Σ de (Σ) et un point I_Σ de (Σ) en contact avec (S) en I sont reliés par :

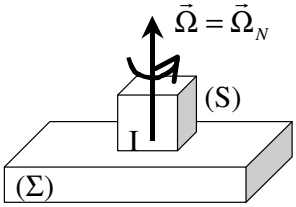
$$\vec{v}(M_\Sigma) = \vec{v}(I_\Sigma) + \vec{\Omega}_\Sigma \wedge \overrightarrow{IM}$$

Le vecteur rotation relatif $\vec{\Omega}_{S/\Sigma}$ de (S) par rapport à (Σ) :

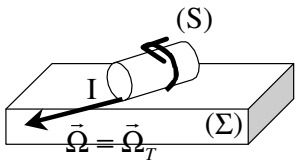
$$\vec{\Omega}_{S/\Sigma} = \vec{\Omega}_S - \vec{\Omega}_\Sigma$$

peut se décomposer en deux vecteurs :

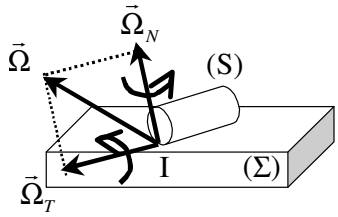
- Un vecteur normal $\vec{\Omega}_N$ au plan tangent (P) en I ; ce vecteur est appelé le vecteur rotation de pivotement.
- Un vecteur $\vec{\Omega}_T$ situé dans le plan tangent (P) en I ; ce vecteur s'appelle le vecteur rotation de roulement.



Le cube pivote sur son support.



Le cylindre roule sur son support.



Le cylindre roule et pivote sur son support.

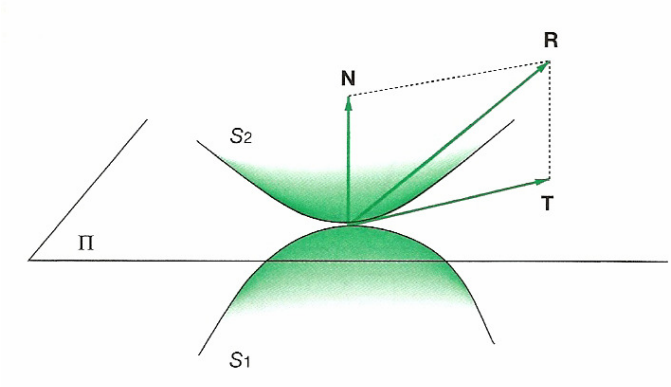
Dans la suite, on supposera que (S) roulera sans pivoter sur (Σ) ou (S) pivotera sur (Σ), ou (S) aura un mouvement de translation sur (Σ).

2 – Actions mécaniques de contact :

- Définition des composantes normale et tangentielle de la résultante des actions mécaniques de contact et des moments de frottement de pivotement et de roulement :

On note dans la suite $\vec{R}$ la résultante des actions de contact du solide (1) sur le solide (2). Elle se décompose selon :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$



où $\vec{T}$ est la composante appartenant au plan tangent (c'est la force de frottement de glissement) et $\vec{N}$ la composante normale à ce plan. Celle-ci est dirigée de (1) vers (2). L'annuler revient à dire que le contact est rompu entre les deux solides.

On peut également définir le moment des actions de contact au point de contact I ; comme le contact est supposé ponctuel, le moment en I des actions de contact sera considéré comme nul.

- Lois de Coulomb

Au XVIII^{ème} siècle, Coulomb a énoncé les lois approchées suivantes, valables pour le frottement de glissement entre deux solides en contact ponctuel (on considérera dans la suite que ces lois restent valables même si le contact n'est pas rigoureusement ponctuel) :

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel. On note $\vec{v}_g$ la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1).

Alors :

- Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ (il y a glissement), la force de frottement de glissement vérifie :

$$\vec{T} \,//\, \vec{v}_g \qquad ; \qquad \vec{T}.\vec{v}_g < 0 \qquad ; \qquad \left\|\vec{T}\right\| = f_s \left\|\vec{N}\right\|$$

  où f_s est appelé coefficient de frottement statique de glissement.

- Si $\vec{v}_g = \vec{0}$ (il n'y a pas glissement), alors :

$$\left\|\vec{T}\right\| \leq f_c \left\|\vec{N}\right\|$$

  où f_c est le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique).

  La loi de Coulomb fournit une inégalité régissant le comportement de la composante $\vec{T}$.

Remarque : généralement, le coefficient de frottement cinétique est inférieur au coefficient de frottement statique, mais de valeur assez proche. En effet, à l'échelle microscopique, les surfaces des solides s'interpénètrent plus lorsqu'il n' a pas glissement.

Dans la suite, on posera $f_s \approx f_c = f$.

Quelques exemples de coefficients de frottement :

Nature du contact	Coefficient de frottement f
bois sur bois	0,30 à 0,50
acier sur acier (à sec)	0,15 à 0,20
acier sur caoutchouc	0,25 à 0,45
pneu sur route sèche	0,7
pneu sur route mouillée	0,1
métal sur glace	0,02

- Cône de frottement :

On considère un solide immobile sur un sol incliné. Le solide reste t'il immobile ou commence t'il à glisser ?

Le théorème du centre d'inertie appliqué au solide donne :

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = \vec{0}$$

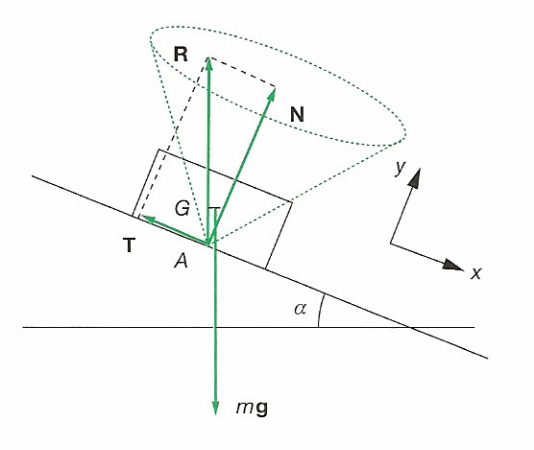
En projection :

$$T = mg\sin\alpha \qquad ; \qquad N = mg\cos\alpha$$

La condition de non glissement est T < fN, soit :

$$\tan\alpha \le f = \tan\varphi \qquad ou \qquad \alpha \le \varphi = \arctan f$$

L'interprétation géométrique est que la résultante $\vec{R}$ doit se trouver dans le cône d'axe $\vec{N}$ et de demi-angle au sommet $\varphi = \arctan f$. Ce cône est appelé cône de frottement.



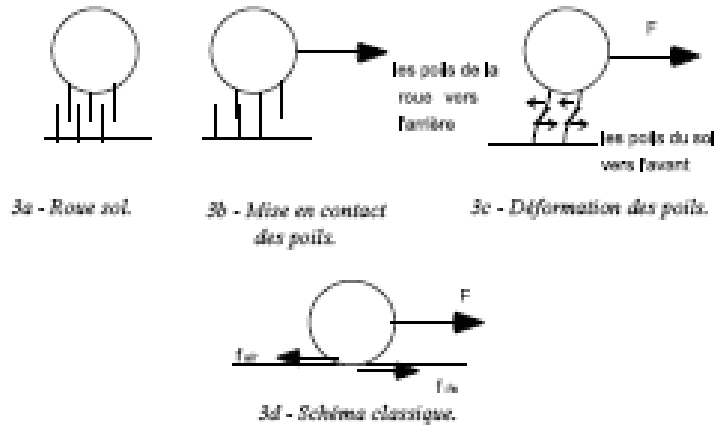
Imaginons que la pente α augmente petit à petit. Ainsi, $\vec{R} = -m\vec{g}$ ne change pas alors que la normale à la pente bascule petit à petit. Au bout d'un moment, la résultante $\vec{R}$ sort du cône de frottement : le solide commence à glisser.

On pourrait faire une analyse du même type en supposant que le sol devient de plus en plus glissant et donc que f diminue. Cette analyse représente le sens physique de l'inégalité introduite dans les lois de Coulomb.

Exemple (BUP, Mars 2000) :

Cas A : la voiture en panne est poussée

Pour simplifier, est représentée sur le schéma une seule roue. Nous avons représenté sur la figure 3a la situation avant que le chauffeur ne pousse la voiture. Quand on accélère la voiture en la poussant, celui qui pousse exerce une force horizontale sur la voiture. Ensuite, il suffit de faire comme pour les deux blocs : quand on pousse sur la roue, les poils solidaires de la roue viennent en contact avec ceux du sol, ils se déforment mutuellement (vers l'arrière pour les poils de la roue et vers l'avant pour les poils



3a - Roue sol. *3b - Mise en contact des poils.* *3c - Déformation des poils.*

3d - Schéma classique.

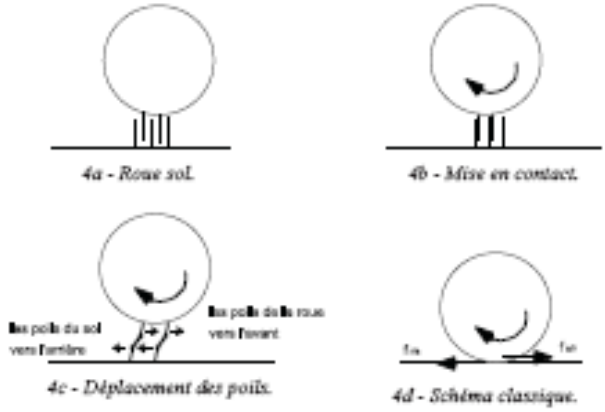
Figure 3

du sol - figure 3c) et les courbures résultantes indiquent le sens des forces d'interaction. L'ensemble des forces horizontales qui s'exercent sur ce système est indiqué sur la figure 3d.

Nous remarquons que, dans ce cas, la force de frottement qui s'exerce sur la roue s'oppose au mouvement de translation, alors que son moment permet à la roue de tourner.

Cas B : la voiture, en état de marche, démarre

Quand le moteur tourne et que l'on appuie sur l'accélérateur, il s'exerce un couple sur la roue. Les poils solidaires de la roue viennent au contact de ceux du sol (figure 4b) ; ils se déforment et se déplacent, au niveau du contact, vers la gauche (l'arrière). Les poils de la roue et du sol se déforment mutuellement (vers l'avant pour ceux du sol, vers l'arrière pour ceux de la roue - figure 4c). Il en résulte une force vers l'avant sur la roue, c'est-à-dire une force motrice (figure 4d). Cette force de frottement qui s'exerce sur la roue permet à la voiture de démarrer alors que son moment s'oppose au moment (ou couple) agissant.



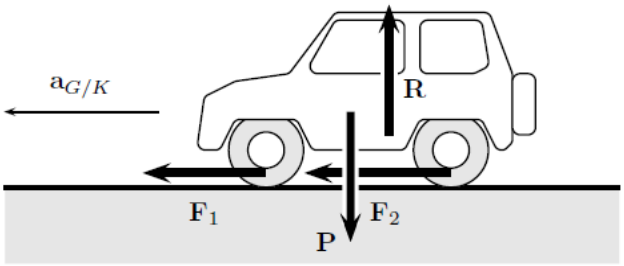
4a - Roue sol. *4b - Mise en contact.*

4c - Déplacement des poils. *4d - Schéma classique.*

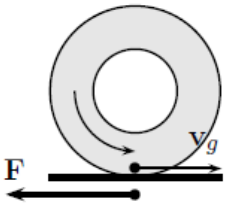
Figure 4

Compléments : démarrage d'une voiture

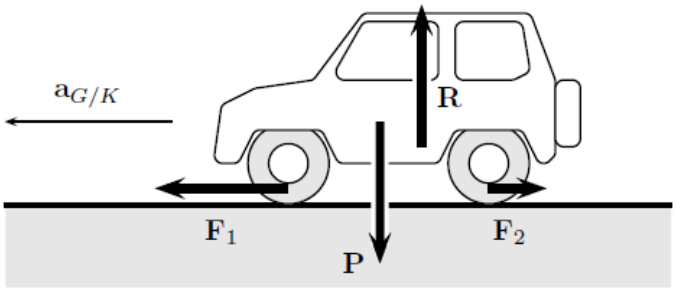
L'étude dynamique de l'accélération d'un véhicule impose de ne prendre en compte que les forces extérieures, c'est-à-dire, outre le poids, les actions de contact du support (voir la figure : c'est l'action de la route sur les roues qui est responsable de l'accélération. Sur le schéma, cette action est décomposée en une action verticale $\mathbf{R}$ (qui compense le poids $\mathbf{P}$) et deux actions longitudinales $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, qui rendent compte de l'accélération du centre de masse G du véhicule.



Accélération d'un véhicule (à quatre roues motrices)



Il n'y a en fait pas de paradoxe : ces actions exercées par le sol ne sont que le résultat de la réaction du sol à l'appui des roues. Lorsque le conducteur démarre, l'effort (le couple moteur) est exercé sur les axes des roues motrices. Celles-ci sont mises en rotation (cf. ci-contre) et tendent à glisser dans le sens de la vitesse $\mathbf{v}_g$ indiquée sur la figure. Du fait de cette tendance au glissement, le sol agit sur les roues en sens inverse du glissement des roues motrices, donc dans le sens qui accélère le véhicule.



Accélération d'un véhicule (à deux roues motrices à l'avant)

Pour un véhicule à seulement deux roues motrices, le problème ne se pose pas dans les mêmes termes pour les roues non motrices. Il n'y a pas de couple moteur exercé et elles auraient donc naturellement tendance à glisser en sens inverse des roues motrices ; la force de contact exercée par le sol est en général opposée au sens de l'accélération, comme le montre la figure , où les roues motrices sont les roues avant.

3 – Approche énergétique :

- Puissance des actions mécaniques de contact

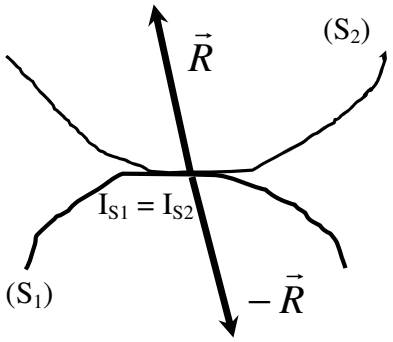
On a vu que la puissance des actions exercées sur un solide est :

$$P = \vec{v}(A).\vec{F}_{ext} + \vec{M}_{A,ext}.\vec{\Omega}$$

où A est un point quelconque du solide.

On s'intéresse à l'action du solide (S_1) sur le solide (S_2). Le contact est supposé ponctuel en I.

On note $\vec{R}$ la résultante de l'action de (S_1) sur le solide (S_2).



Alors, la puissance reçue par le solide (S_2) de la part du solide (S_1) est : (le moment est nul puisque le contact est ponctuel)

$$P_2 = \vec{v}(I_{S_2}).\vec{R}$$

$-\vec{R}$ désigne la résultante de l'action de (S_2) sur le solide (S_1). Alors, la puissance reçue par le solide (S_1) de la part du solide (S_2) est :

$$P_1 = \vec{v}(I_{S_1}).(-\vec{R})$$

La puissance totale des actions de contact entre les deux solides est alors :

$$P = P_1 + P_2 = \left(\vec{v}(I_{S_2}) - \vec{v}(I_{S_1})\right)\vec{R}$$

Soit, avec $\vec{v}_g = \vec{v}(I_{S_2}).-\vec{v}(I_{S_1})$ la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1) :

$$P = \vec{v}_g.\vec{R}$$

Soit encore, puisque $\vec{N}$ est perpendiculaire à la vitesse de glissement :

$$P = \vec{v}_g.\vec{T}$$

- Conséquences des lois de Coulomb :

* Il y a glissement : alors, $\vec{T}.\vec{v}_g < 0$ et P < 0. A cause des frottements entre les solides, leur énergie mécanique totale diminue.

* Il y a roulement sans glissement : alors la vitesse de glissement est nulle et P = 0. Les actions de contact ne dissipent aucune énergie alors qu'il existe la plupart du temps une composante tangentielle non nulle de frottement.

Très souvent, le solide (S_1) est le sol immobile ; alors :

$$P = \vec{v}(I_{S_2}).\vec{T} = 0$$

En cas de roulement sans glissement, la puissance des actions de contact du sol immobile sur un solide est nulle.

4 - Application à la résolution des problèmes :

L'étude d'un mouvement avec contact de solides fait intervenir notamment les forces de contact comme inconnues. Pour résoudre le problème, il faut écrire :

- Les équations découlant du principe fondamental des systèmes.
- Une relation supplémentaire provenant d'une hypothèse sur l'existence ou non d'un glissement, hypothèse qui devra être vérifiée.

Si l'on suppose qu'il y a glissement, la relation supplémentaire est alors donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{T} \,//\, \vec{v}_g \qquad ; \qquad \vec{T}.\vec{v}_g < 0 \qquad ; \qquad \left\|\vec{T}\right\| = f_s \left\|\vec{N}\right\|$$

Il faut ensuite vérifier que la vitesse de glissement est bien non nulle et de sens opposé à $\vec{T}$.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas glissement, la relation supplémentaire est $\vec{v}_g = \vec{0}$ et il faut alors vérifier que $T \leq fN$.

Enfin, si le mouvement comporte différentes phases successives de natures différentes (avec et sans glissement), la vérification de l'hypothèse choisie permet de déterminer l'instant de changement de phase.

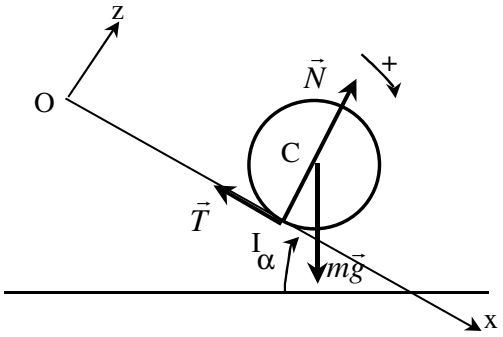
Un 1er exemple d'application ; un cylindre sur un plan incliné :

Un cylindre homogène de centre d'inertie C, de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à son axe, est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale, dans le référentiel terrestre (R) galiléen (l'axe du cylindre est horizontal).

On désigne par f le coefficient de frottement de glissement entre le cylindre et le plan incliné.

a) Déterminer l'accélération $\ddot{x}$ du cylindre. Montrer qu'il y a glissement ou non selon la position de α par rapport à une certaine valeur α_0 que l'on déterminera.

b) Faire un bilan énergétique entre les instants 0 et t. Envisager les deux cas $\alpha < \alpha_0$ et $\alpha > \alpha_0$.



a) Le théorème de la résultante dynamique dans (R) appliquée au cylindre donne :

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T \quad ; \quad 0 = -mg\cos\alpha + N$$

Le théorème du moment cinétique en C, dans le référentiel barycentrique, donne :

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}\,\vec{u}_y = \overrightarrow{CI}\wedge\vec{T} = RT\,\vec{u}_y \qquad d'où \qquad \ddot{\theta} = \frac{2}{mR}T$$

La vitesse de glissement du cylindre sur le plan incliné s'écrit :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_{cyl}) = \vec{v}(C) + \dot{\theta}\vec{u}_y\wedge\overrightarrow{CI} \qquad d'où \qquad v_g = \dot{x} - R\dot{\theta}$$

1er cas ; le cylindre roule sans glisser : $v_g = 0$, *soit* $\dot{x} = R\dot{\theta}$. On obtient alors :

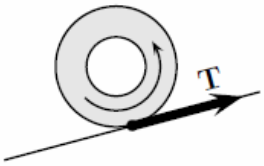
$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T = mg\sin\alpha - \frac{mR}{2}\frac{\ddot{x}}{R} \qquad soit \qquad \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

On doit vérifier l'hypothèse (loi de Coulomb), T < fN. Or, $T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$ et $N = mg\cos\alpha$, d'où :

$$\tan\alpha \le \tan\alpha_0 = 3f$$

Le cylindre roule donc sans glisser tant que $\alpha < \alpha_0$.

Remarque : on trouve, comme on s'y attendait, $\ddot{x}_C < 0$ et $\dot{\omega} > 0$, ce qui rend compte du roulement de la roue vers le bas ; on trouve aussi $T = mg\sin\alpha/3 > 0$: dans ce cas, et comme on pouvait peut-être s'y attendre de manière *qualitative*, les forces de liaison s'opposent au mouvement vers le bas. Ce sont d'ailleurs en fait ces forces qui sont responsables de la mise en rotation de la roue autour de son centre C lors de la descente, puisque les autres forces extérieures (le poids) ne font pas tourner autour de C.



On peut d'ailleurs donner une interprétation qualitative des propriétés $T > 0$ donc $|\ddot{x}_C| < g\sin\alpha$: l'accélération vers le bas du mouvement de la roue est moindre que celui qu'on obtiendrait pour le mouvement d'un point matériel glissant sans frottement sur la même ligne de plus grande pente. Les théorèmes de König permettent de donner une base quantitative à cette interprétation : la seule force motrice (le poids sur la ligne de plus grande pente, $-m_R g\sin\alpha$) doit accomplir à la fois la mise en mouvement du centre de masse C *et* la mise en rotation de la roue autour de C ; ainsi, la roue descend plus lentement qu'en glissant.

2nd cas ; $\alpha > \alpha_0$ et le cylindre glisse en roulant : alors, $T = fN = fmg\cos\alpha$. On en déduit :

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \qquad et \qquad \ddot{\theta} = \frac{2}{R}fg\cos\alpha$$

b) La variation d'énergie cinétique du cylindre entre 0 e t s'écrit :

$$\Delta E_c = E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2$$

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 = mgx\sin\alpha + W_{\vec{T}} = mgx\sin\alpha + \int_0^t \vec{T}.\vec{v}_g\,dt$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 = mgx\sin\alpha - \int_0^t Tv_g\,dt$$

Dans le 1er cas ($\alpha < \alpha_0$), $v_g = 0$: on obtient alors :

$$\frac{3}{4}m\dot{x}^2 = mg\dot{x}\sin\alpha$$

Par dérivation, on retrouve l'accélération $\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$.

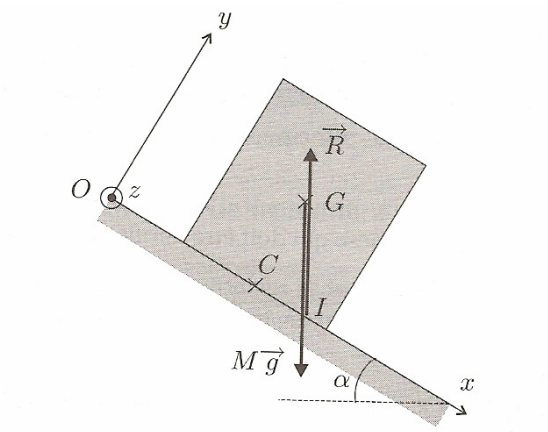
Dans le 2nd cas, $\alpha > \alpha_0$: $v_g = \dot{x} - R\dot{\theta} = g(\sin\alpha - 3f\cos\alpha)\,t$ et on peut bien vérifier que le théorème de l'énergie cinétique est bien vérifié :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 = mgx\sin\alpha - \int_0^t fmg^2\cos\alpha(\sin\alpha - 3f\cos\alpha)\,tdt$$

Un 2nd exemple d'application ; cylindre posé sur sa base

On considère un cylindre (C) de masse M, de rayon a et de hauteur h. On pose le cylindre sur sa base sur un plan incliné d'angle α. Sa vitesse initiale est nulle.

Dans une première expérience, on pose le cylindre $\mathcal{C}$ sur sa base (voir figure 7.6). En augmentant l'inclinaison de $\mathcal{P}$ à partir de $\alpha = 0$, on constate l'existence d'un angle limite α_1 tel que $\mathcal{C}$ reste en équilibre si $\alpha < \alpha_1$, et que $\mathcal{C}$ glisse vers le bas si $\alpha > \alpha_1$. Nous allons interpréter ces observations.



a) Equations générales

Les actions mécaniques appliquées à $\mathcal{C}$ sont :

- son poids $M\overrightarrow{g} = Mg\sin\alpha\overrightarrow{u_x} - Mg\cos\alpha\overrightarrow{u_y}$ appliqué en son centre de masse G,
- l'action de contact exercée par $\mathcal{P}$ de résultante $\overrightarrow{R} = R_T\overrightarrow{u_x} + R_N\overrightarrow{u_y}$.

Remarque R_T et R_N sont des composantes algébriques. Il est conseillé d'utiliser dans la majorité des cas des composantes algébriques dans les calculs. Si on est **sûr** du sens d'une force, on peut travailler avec une norme pour cette force.

Appliquons le théorème de la résultante cinétique à $\mathcal{C}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R} = Oxyz$:

$$M\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}}(G) = M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R} \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} M\ddot{x}_G & = & Mg\sin\alpha + R_T \\ 0 & = & -Mg\cos\alpha + R_N \end{array} \right.$$

Nous disposons seulement de deux équations pour calculer les trois inconnues $\ddot{x}_G$, R_N et R_T.

b) Cas où il y a équilibre

Dans ce cas, $\ddot{x}_G = 0$. Il vient aussitôt : $R_N = Mg\cos\alpha$ et $R_T = -Mg\sin\alpha$.
L'hypothèse de non glissement que nous avons faite n'est valable que si :

$$\frac{|R_T|}{|R_N|} \leqslant f \quad \text{soit} \quad \tan\alpha \leqslant f.$$

c) Cas où il y a glissement

Dans ce cas, $|R_T| = f|R_N|$. Pour que cette relation soit exploitable, il faut pouvoir enlever les valeurs absolues, donc connaître le signe de R_T. La vitesse de glissement étant dirigée vers le bas et R_N étant positive : $R_T = -fR_N$.

Cette équation supplémentaire nous permet de calculer :

$$R_N = Mg\cos\alpha, \quad R_T = -fMg\cos\alpha, \quad \ddot{x}_G = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

L'hypothèse de glissement n'est valable que si la vitesse de glissement est bien de sens opposé à la composante tangentielle de l'action de contact. Nous trouvons, en tenant compte de l'absence de vitesse initiale :

$$\overrightarrow{v}_g = \dot{x}_G\overrightarrow{u}_x = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)t\overrightarrow{u}_x.$$

Il faut donc que :

$$\sin\alpha - f\cos\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha > f.$$

Commentaire Les résultats sont conformes aux observations et $\alpha_1 = \arctan f$.

d) Possibilité de basculement

Nous n'avons pas écrit le théorème du moment cinétique : il permet de montrer que l'action de contact est une force appliquée en un point (ce qui n'est pas certain *a priori* puisqu'il y a contact sur toute une surface) et de déterminer ce point.

Plaçons-nous dans le cas de l'équilibre. Notons I le point d'intersection de la ligne d'action du poids avec le plan incliné (voir figure 7.6). Le moment de l'action de contact en I est nul puisque qu'il est égal (à l'équilibre) à l'opposé du moment du poids dont la ligne d'action passe par I. Par conséquent l'action de contact est équivalente à une force appliquée en I. La distance de ce point au centre C de la base du cylindre est : $CI = \frac{h}{2}\tan\alpha$. Mais l'équilibre n'est possible que si I est vraiment un point de la base du cylindre, il faut donc une condition supplémentaire :

$$CI < a \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha < \frac{2a}{h}.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, le cylindre bascule.

Commentaires L'équilibre du cylindre peut être rompu de deux manières : soit il se met à glisser, soit il bascule. Dans l'expérience décrite on n'observe pas de basculement car le glissement intervient en premier. Ceci nous indique que, dans les conditions de notre expérience $f < \frac{2a}{h}$. Il est intuitif que le cylindre ne glisse pas mais bascule si le coefficient de frottement est grand.

Un 3ème exemple d'application ; oscillateur à frottement solide

VI) Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

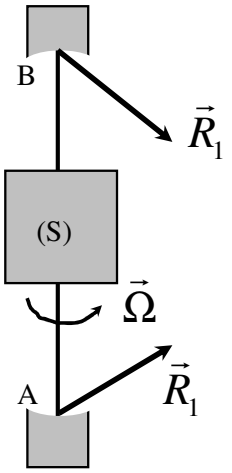
1 – Description de quelques liaisons classiques entre deux solides :

- Liaison glissière ou liaison prismatique :
- Liaison rotule ou liaison sphérique :
- Liaison pivot (ou liaison rotoïde) :

2 – Liaisons parfaites :

Exemple : une liaison pivot parfaite

Le solide (S) est maintenu par deux pivots quasi-ponctuels en A et B de manière à pouvoir tourner autour de l'axe fixe (AB) dans le référentiel d'étude. Nous supposons que les liaisons en A et B sont parfaites : les actions de contact qui s'exercent sur (S) en A et B se réduisent respectivement à deux forces : $\vec{R}_1$ passant par A et $\vec{R}_2$ passant par B.



Calculer les éléments de réduction en A du torseur des actions mécaniques de contact sur (S).

Réponse :

La résultante est $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$. Le moment en A est :

$$\vec{M}_{A,contact} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2$$

On constate que $\vec{M}_{A,contact}$ est bien perpendiculaire à l'axe de rotation (AB) du solide (S) : la liaison est parfaite.

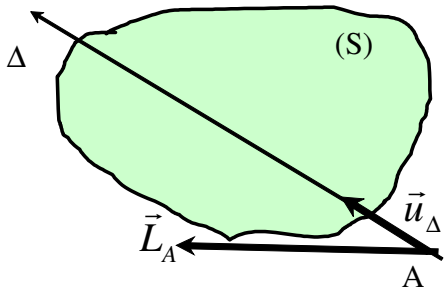
On fait ainsi ressortir le fait que dans le cas d'une liaison pivot, même parfaite, les actions de liaison ne peuvent pas en général être représentées par une seule force rencontrant l'axe.

Seul le moment projeté sur l'axe est nul.

3 – Etude du mouvement de rotation (liaison pivot) :

Rappel : (théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe)

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, fixe dans (R).



En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}}.\vec{u}_\Delta = M_{\Delta,ext} \qquad (L_\Delta = \vec{L}_A.\vec{u}_\Delta)$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans l'étude du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, en utilisant :

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

où ω désigne la vitesse angulaire du solide, portée par l'axe Δ.

Finalement (théorème « scalaire » du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe de rotation Δ) :

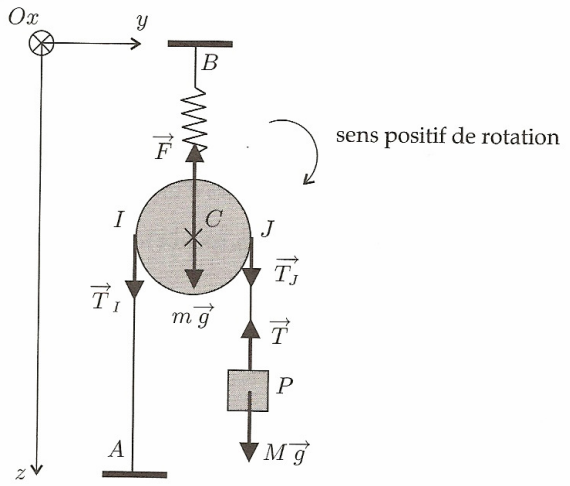
$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = L_\Delta \qquad (L_\Delta = \vec{L}_A.\vec{u}_\Delta)$$

4 – Exemples :

- Machine d'Atwood :

- Système avec fil, ressort et poulie :

Nous étudions le dispositif suivant : une masse M assimilée à un point matériel P est suspendue à un fil inextensible et sans masse qui passe sur une poulie et est attaché sur un support fixe en un point A. La poulie, de centre C, de



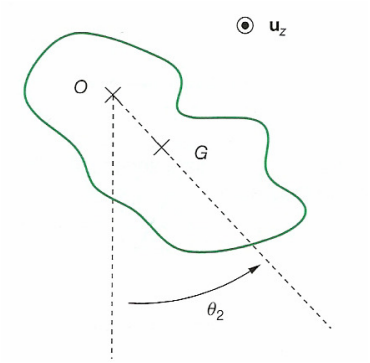
masse m et de rayon r, tourne autour de son axe Cx par rapport auquel son moment d'inertie est $J_{Cx}(\text{poulie}) = \frac{1}{2}mr^2$. L'axe Cx est matérialisé par une tige sans masse liée à un ressort, de constante de raideur k et longueur au repos l_0, qui est attaché sur un support fixe en B.

La liaison de la poulie autour de Cx est une liaison pivot parfaite. Le fil ne glisse pas sur la poulie.

Le système étant à l'équilibre, on descend le point P en veillant à ce que le fil reste constamment tendu (ceci nécessite que C descende aussi et que la poulie tourne autour de son axe) puis on le lâche.

On cherche à étudier le mouvement qui suit.

- Le pendule pesant :

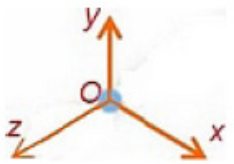
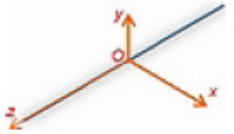
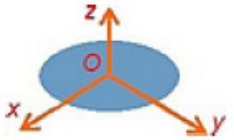
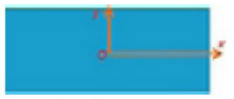


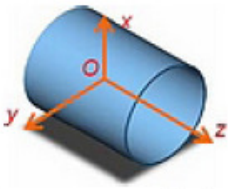
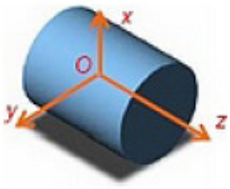
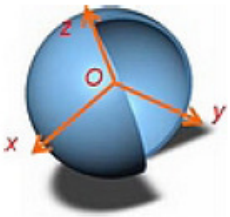
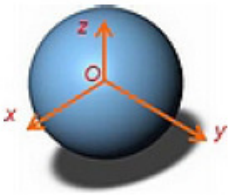
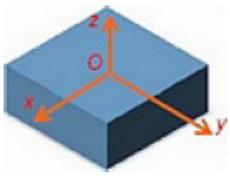
* Equation de la dynamique :

* Approche énergétique :

ANNEXE : Matrice d'inertie (cours de SI)

5.3 Principales matrices d'inertie

Corps homogène de masse m	Centre	Matrice d'inertie en $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 Masse ponctuelle de masse m	centre	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 Tige rectiligne : longueur l	centre	$\begin{bmatrix} \frac{m.l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 Disque : rayon R	centre	$\begin{bmatrix} \frac{m.R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}$
 Rectangle : longueurs a et b	centre	$\begin{bmatrix} \frac{m.b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix}$

Corps homogène de masse m	Centre	Matrice d'inertie en $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 Cylindre creux : rayon R , longueur l	centre	$\begin{bmatrix} \frac{m.R^2}{2}+\frac{m.l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.R^2}{2}+\frac{m.l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m.R^2 \end{bmatrix}$
 Cylindre plein : rayon R , longueur l	centre	$\begin{bmatrix} \frac{m.R^2}{4}+\frac{m.l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.R^2}{4}+\frac{m.l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}$
 Sphere creuse : rayon R	centre	$\begin{bmatrix} \frac{2.m.R^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2.m.R^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2.m.R^2}{3} \end{bmatrix}$
 Sphere pleine : rayon R	centre	$\begin{bmatrix} \frac{2.m.R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2.m.R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2.m.R^2}{5} \end{bmatrix}$
 Parallélépipède rectangle : coté a, b, c	centre	$\begin{bmatrix} \frac{m.(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix}$